Лекция 9

Знакопеременные числовые ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость

Тлеулесова Айгерим Мекемтасовна

Цель лекции

- Сформировать у студентов понимание свойств знакопеременных рядов, условий их сходимости по признаку Лейбница, а также различий между абсолютной и условной сходимостью.

Основные вопросы:

- Понятие знакопеременного ряда.
- Признак Лейбница и его применение.
- Необходимые условия сходимости знакопеременных рядов.
- Абсолютная и условная сходимость: определения и примеры.
- Сравнение степеней сходимости: связь между абсолютной и условной сходимостью.

Пусть члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots$$

удовлетворяют условиям:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$

и 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Тогда знакочередующийся ряд сходится, причём его сумма *S* не превосходит его первого члена, т.е. $S < u_1$.

Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$

члены знакочередующегося ряда

$$u_1=\frac{1}{2}, u_2=\frac{1}{3}, u_3=\frac{1}{4}, .., u_{n+1}=\frac{1}{n+1}, ..$$

монотонно убывают и $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

Согласно признаку Лейбница ряд сходится.

2) общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$ не стремится к нулю, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$$

Следовательно, ряд расходится согласно необходимому признаку.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то

знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится.

Абсолютно сходящийся ряд

Определение.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то

знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся.

Условно сходящийся ряд

Определение.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то

знакопеременный ряд

называется условно сходящимся.

Пример

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ абсолютно сходится, т.к. ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ сходится условно, т.к. он согласно признаку Лейбница сходится, но ряд из модулей его членов, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ расходится вместе с гармоническим рядом .

Контрольные вопросы

- Что называется знакопеременным рядом?
- Сформулируйте признак Лейбница.
- Какие условия необходимы для применения признака Лейбница?
- В чём разница между абсолютной и условной сходимостью?
- Можно ли сделать вывод о сходимости знакопеременного ряда, если он не сходится абсолютно?

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004

3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.